Přípravný kurz 2015

Příklad.
Řešte v $\mathbb{R}$:

$$x^2 + 2x - 35 = |x - 5|.$$

Řešení. Pro $x \geq 5$ má rovnice tvar

$$x^2 + 2x - 35 = x - 5 \Leftrightarrow x^2 + x - 30 = 0 \Leftrightarrow (x-5)(x+6) = 0 \Leftrightarrow x = 5 \vee x = -6,$$

takže rovnice v zadání má v tomto případě jedno řešení $x \in \{5\}$.
Pro $x < 5$ má rovnice tvar

$$x^2 + 2x - 35 = -x + 5 \Leftrightarrow x^2 + 3x - 40 = 0 \Leftrightarrow (x-5)(x+8) = 0 \Leftrightarrow x = 5 \vee x = -8,$$

takže rovnice v zadání má v tomto případě opět jedno řešení $x \in \{-8\}$.
Sjednocením obou případů dostaneme úplné řešení rovnice v zadání,

$$x \in \{5, -8\}.$$

$\square$

Příklad.
Řešte v $\mathbb{R}$:

7

$$|x^2 + 2x - 35| = x - 5.$$

Řešení. Pro $x \in \langle -\cancel{6}, 5\rangle$ je $x^2 + 2x - 35 \leq 0$, rovnice má v tomto případě tvar

$$-x^2 - 2x + 35 = x - 5 \Leftrightarrow x^2 + 3x - 40 = 0 \Leftrightarrow x = 5 \vee x = -8,$$

dostáváme proto jedno řešení $x \in \{5\}$.
Pro $x \in (-\infty, -\cancel{6}) \cup (5, +\infty)$ je $x^2 + 2x - 35 > 0$, rovnice má tvar

7

$$x^2 + 2x - 35 = x - 5 \Leftrightarrow x^2 + x - 30 = 0 \Leftrightarrow x = 5 \vee x = -6,$$

rovnice v zadání nemá v tomto případě žádné řešení.
Sjednocením obou případů dostaneme jediné řešení rovnice v zadání

$$x \in \{5\}.$$

$\square$

Příklad.
Řešte v $\mathbb{R}$:

$$2x^5 + x^4 - 19x^3 + 19x^2 - x - 2 = 0.$$

Dělitelé absolutního členu jsou čísla ± 1 , ± 2 , protože se jedná o reciproký polynom, tak číslo $x = 1$ je kořenem, jak snadno zkontrolujeme dosazením.
Zkusme polynom vydělit činitelem $x - 1$:

$$(2x^5 + x^4 - 19x^3 + 19x^2 - x - 2) : (x - 1) = 2x^4 + 3x^3 - 16x^2 + 3x + 2.$$

Tento polynom je opět reciproký,

$$2x^4 + 3x^3 - 16x^2 + 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow 2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 3\left(x + \frac{1}{x}\right) - 16 = 0.$$

Označme $y = x + \frac{1}{x}$, pak $y^2 = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}$, takže

$$2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 3\left(x + \frac{1}{x}\right) - 16 = 0 \Leftrightarrow 2(y^2 - 2) + 3y - 16 = 0 \Leftrightarrow 2y^2 + 3y - 20 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 160}}{4} = \frac{-3 \pm 13}{4} = \left\langle \begin{matrix} \frac{5}{2} \\ -4 \end{matrix} \right. .$$

Dosazením do substituce dostaneme

$$x + \frac{1}{x} = \frac{5}{2} \Leftrightarrow 2x^2 - 5x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{4} = \left\langle \begin{matrix} 2 \\ \frac{1}{2} \end{matrix} \right. ,$$

$$x + \frac{1}{x} = -4 \Leftrightarrow x^2 + 4x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{12}}{2} = -2 \pm \sqrt{3}.$$

Celkem tedy má rovnice v zadání řešení

$$x \in \left\{1, 2, \frac{1}{2}, -2 + \sqrt{3}, -2 - \sqrt{3}\right\}.$$

Příklad.
Při kterém $\alpha \in \mathbb{R}$ je jeden kořen rovnice

$$x^2 + (2\alpha - 1)x + \alpha^2 + 2 = 0$$

dvojnásobkem druhého?
Řešení. Označme kořeny $x_{1,2}$, chceme, aby $x_1 = 2x_2$. Protože

$$2\alpha - 1 = -(x_1 + x_2), \quad \alpha^2 + 2 = x_1 x_2,$$

je

$$2\alpha - 1 = -3x_2, \quad \alpha^2 + 2 = 2x_2^2,$$

odkud

$$x_2 = -\frac{1}{3}(2\alpha - 1), \quad \alpha^2 + 2 = 2 \cdot \frac{1}{9}(2\alpha - 1)^2 \Leftrightarrow \alpha^2 + 2 = \frac{2}{9}(4\alpha^2 - 4\alpha + 1) \Leftrightarrow \alpha^2 + 8\alpha + 16 = 0 \Leftrightarrow (\alpha + 4)^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha = -4.$$

□

Příklad.
Určete největší a nejmenší z celých čísel n , pro která má rovnice

$$nx^2 + 8x + n + 8 = 0$$

reálné kořeny.
Řešení. Pro $n = 0$ jde o lineární rovnici, která má reálný kořen, číslo 0 tedy vyhovuje. Pro $n \neq 0$ jde o kvadratickou rovnici, jejíž diskriminant je roven

$$D = 64 - 4n(n + 8) = 4(16 - n^2 - 8n).$$

Je

$$-n^2 - 8n + 16 \geq 0 \Leftrightarrow n^2 + 8n - 16 \leq 0 \Leftrightarrow n \in \langle -4 - 4\sqrt{2}, -4 + 4\sqrt{2} \rangle \Leftrightarrow n \in \{-9, -8, \ldots, 1\}.$$

□

Příklad.
Řešte v $\mathbb{R}$ nerovnici

$$\frac{2x + 5}{x + 6} < 2.$$

Řešení. Je

$$\frac{2x + 5}{x + 6} < 2 \Leftrightarrow \frac{2x + 5 - 2x - 12}{x + 6} < 0 \Leftrightarrow \frac{-7}{x + 6} < 0 \Leftrightarrow x + 6 > 0 \Leftrightarrow x > -6.$$

□

Příklad.
Řešte v $\mathbb{R}$ nerovnici

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x + 1} \geq \frac{1}{x^2}.$$

Řešení. Je

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x + 1} \geq \frac{1}{x^2} \Leftrightarrow \frac{x(x + 1) - x^2 - (x + 1)}{x^2(x + 1)} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{-1}{x^2(x + 1)} \geq 0 \Leftrightarrow x \neq 0 \wedge x + 1 < 0 \Leftrightarrow x < -1.$$

□

Příklad.
Řešte v $\mathbb{R}$ nerovnici

$$\sqrt{1 + x^2} < 1 - x.$$

Řešení. Je

$$\sqrt{1 + x^2} < 1 - x \Leftrightarrow 1 - x \geq 0 \wedge 1 + x^2 < 1 - 2x + x^2 \Leftrightarrow x \leq 1 \wedge 0 < -2x \Leftrightarrow x < 0.$$

□

Příklad.
Řešte v $\mathbb{R}$ nerovnici

$$\left| \frac{x + 7}{x - 4} \right| > 1.$$

Řešení. Číslo $x = 4$ není řešením, neboť nulou nelze dělit. Pro ostatní x můžeme vynásobit nerovnici jmenovatelem:

$$\left| \frac{x + 7}{x - 4} \right| > 1 \Leftrightarrow |x + 7| > |x - 4|.$$

Vzdálenost od čísla -7 má být větší než od čísla 4 . Uprostřed mezi čísly -7 a 4 leží číslo $-\frac{3}{2}$, proto řešením je nerovnice je množina $\left(-\frac{3}{2}, +\infty\right) - \{4\}$.

□

Příklad.
Spočtěte

$$\log_{25} \frac{1}{\sqrt[3]{5}} .$$

Řešení. Je

$$\log_{25} \frac{1}{\sqrt[3]{5}} = \log_{25} 5^{-\frac{1}{3}} = -\frac{1}{3} \log_{25} 5 = -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = -\frac{1}{6} .$$

□

Příklad.
Vypočtěte

$$100^{\frac{1}{2} - \log \sqrt[4]{4}} .$$

Řešení. Je

$$100^{\frac{1}{2} - \log \sqrt[4]{4}} = \frac{\sqrt{100}}{100^{\frac{1}{4} \log 4}} = \frac{10}{(10^{\log 4})^{\frac{1}{2}}} = \frac{10}{\sqrt{4}} = \frac{10}{2} = 5.$$

□

Příklad.
Pro jaké $a \in \mathbb{R}$ má následující výraz smysl?

$$\text{a)}\ \log_a \left(a \left(a \cdot a^{\frac{1}{4}} \right)^{\frac{1}{3}} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \text{b)}\ 10^{|\log a|}, \quad \text{c)}\ a^{\frac{1}{\log a}} .$$

Řešení. a) Výraz $\sqrt[4]{a}$ je definován pro $a \geq 0$, třetí odmocnina pro všechna reálná čísla, druhá opět pro všechna nezáporná čísla, v základu logaritmu může být $a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$. Proto celkově $a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$. Výraz je roven

$$\log_a \left(a \left(a \cdot a^{\frac{1}{4}} \right)^{\frac{1}{3}} \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \log_a a \left(a \cdot a^{\frac{1}{4}} \right)^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{2} \log_a a + \frac{1}{2} \log_a \left(a \cdot a^{\frac{1}{4}} \right)^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \log_a a \cdot a^{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \log_a a^{\frac{1}{4}} = \frac{4}{6} + \frac{1}{24} = \frac{17}{24} .$$

b) Logaritmus je definován pro kladná čísla, tedy $a > 0$. Pak

$$10^{|\log a|} = \left\langle \begin{array}{ll} 10^{\log a} = a & \text{pro } a \geq 1, \\ 10^{-\log a} = \dfrac{1}{a} & \text{pro } a \in (0, 1). \end{array} \right.$$

c) Argumentem logaritmu může být jen kladné číslo: $a > 0$. Ve jmenovateli zlomku $\frac{1}{\log a}$ nesmí být nula: $a \neq 1$. Celkem $a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$. Pro tato a je

$$a^{\frac{1}{\log a}} = \left(10^{\log a}\right)^{\frac{1}{\log a}} = 10^{\log a \cdot \frac{1}{\log a}} = 10.$$

□

Příklad.
Vypočtěte

$$\frac{\log_5 30}{\log_{150} 5} - \frac{\log_5 750}{\log_6 5} .$$

Řešení. Je

$$\frac{\log_5 30}{\log_{150} 5} - \frac{\log_5 750}{\log_6 5} = \log_5 30 \cdot \log_5 150 - \log_5 750 \cdot \log_5 6 = (1 + \log_5 6)(2 + \log_5 6) - (3 + \log_5 6) \log_5 6 = 2.$$

□

Příklad.
Uspořádejte podle velikosti čísla

$$3^{3^{3^3}}, \quad (3^3)^{3^3}, \quad \left(\left(3^3\right)^3\right)^3, \quad 3^{(3^3)^3}, \quad \left(3^{3^3}\right)^3.$$

Řešení. Označme $a_1 = 3^{3^{3^3}}$, $a_2 = (3^3)^{3^3}$, $a_3 = \left(\left(3^3\right)^3\right)^3$, $a_4 = 3^{(3^3)^3}$, $a_5 = \left(3^{3^3}\right)^3$. Označme $b_i = \log_3 a_i$. Pak

$$b_1 = 3^{3^3} = 3^{27}, \quad b_2 = 3 \cdot 3^3 = 3^4, \quad b_3 = 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^3, \quad b_4 = (3^3)^3 = 3^9, \quad b_5 = 3^3 \cdot 3 = 3^4.$$

Vidíme, že

$$a_1 > a_4 > a_2 = a_5 > a_3.$$

◻

Příklad.
Řešte rovnici

$$\log_x a = a$$

s parametrem $a \in \mathbb{R}$ a neznámou $x \in \mathbb{R}$.
Řešení. Je

$$\log_x a = a \Leftrightarrow \frac{\log a}{\log x} = a \Leftrightarrow \frac{1}{a} \log a = \log x \Leftrightarrow \log a^{\frac{1}{a}} = \log x \Leftrightarrow x = a^{\frac{1}{a}}.$$

Zadání a úpravy mají smysl jen pro $a > 0$, $a \neq 1$.

◻

Příklad.
Určete všechna $k \in \mathbb{R}$ tak, že rovnice

$$\log(kx) = 2 \log(x+1)$$

o neznámé x má právě jedno řešení.
Řešení. Je

$$\log(kx) = 2\log(x+1) \Leftrightarrow kx = (x+1)^2 \Leftrightarrow 0 = x^2 + (2-k)x + 1,$$

proto rovnice má právě jedno řešení tehdy, pokud

$$(2-k)^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow k(k-4) = 0 \Leftrightarrow k = 0 \lor k = 4.$$

Hodnota $k = 0$ nevyhovuje, pro $k = 4$ má rovnice jedno řešení $x = 1$.

◻

Příklad.
Řešte rovnici

$$\cos x = -\frac{1}{2}.$$

Řešení. Je $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$, takže

$$x \in \left\{ \frac{2}{3}\pi + 2k\pi \middle| k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{4}{3}\pi + 2k\pi \middle| k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

◻

Příklad.
Řešte rovnici

$$2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0.$$

Řešení. Je

$$2\cos^2 x - \cos x - 1 = (\cos x - 1)(2\cos x + 1) = 0 \Leftrightarrow \cos x = 1 \lor \cos x = -\frac{1}{2},$$

takže

$$x \in \{2k\pi | k \in \mathbb{Z}\} \cup \left\{ \frac{2}{3}\pi + 2k\pi \middle| k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{4}{3}\pi + 2k\pi \middle| k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

◻

Příklad.
Řešte rovnici

$$\sqrt{1 - \cos 2x} = \sin 2x.$$

Řešení. Aby rovnice mohla mít řešení, musí být

$$\sin 2x \geq 0 \Leftrightarrow 2x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \langle 2k\pi, \pi + 2k\pi \rangle \Leftrightarrow x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\langle k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi \right\rangle.$$

Za této podmínky je umocnění na druhou ekvivalentní úprava, takže

$$\sqrt{1-\cos 2x} = \sin 2x \Leftrightarrow 1-\cos 2x = \sin^2 2x \Leftrightarrow 1-\cos 2x = 1-\cos^2 2x \Leftrightarrow \cos^2 2x - \cos 2x = 0 \Leftrightarrow \cos 2x(\cos 2x - 1) = 0 \Leftrightarrow \cos 2x = 0 \vee \cos 2x = 1,$$

odkud

$$2x \in \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \middle| k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \{2k\pi | k \in \mathbb{Z}\} \Leftrightarrow x \in \left\{\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \middle| k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \{k\pi | k \in \mathbb{Z}\}.$$

Řešením je tedy

$$x \in \left\{\frac{\pi}{4} + k\pi \middle| k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \{k\pi | k \in \mathbb{Z}\}.$$

□

Příklad.
Řešte rovnici

$$\sin x + \cos x = \frac{1}{\sin x}.$$

Řešení. Za podmínky $x \notin \{k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$ je

$$\sin x + \cos x = \frac{1}{\sin x} \Leftrightarrow \sin^2 x + \cos x \sin x = 1 \Leftrightarrow \sin^2 x + \cos x \sin x = \sin^2 x + \cos^2 x \Leftrightarrow \cos x(\cos x - \sin x) = 0 \Leftrightarrow \cos x = 0 \vee \operatorname{tg} x = 1,$$

takže

$$x \in \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \middle| k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{\pi}{4} + k\pi \middle| k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

□

Příklad.
Řešte nerovnici

$$\sin x \leq \cos x.$$

Řešení. Řešením rovnice $\sin x = \cos x \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = 1$ je $x \in \left\{\frac{\pi}{4} + k\pi \middle| k \in \mathbb{Z}\right\}$. Odtud je již vidět

$$x \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left\langle -\frac{3}{4}\pi + 2k\pi, \frac{\pi}{4} + 2k\pi \right\rangle.$$

□

Příklad.
Vypočtěte i^n, kde $n \in \mathbb{N}$ a i je komplexní jednotka.
Řešení. Je $i^1 = i$, $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$, proto

$$i^n = \begin{cases} 1 & \text{pokud } n \mod 4 = 0, \\ i & \text{pokud } n \mod 4 = 1, \\ -1 & \text{pokud } n \mod 4 = 2, \\ -i & \text{pokud } n \mod 4 = 3. \end{cases}$$

□

Příklad.
Vypočtěte reálnou a imaginární část komplexního čísla

$$\frac{1+i}{1-i}.$$

Řešení. Je

$$\frac{1+i}{1-i} = \frac{1+i}{1-i} \cdot \frac{1+i}{1+i} = \frac{(1+i)^2}{1-i^2} = \frac{1}{2} 2i = i.$$

Tedy reálná část je rovna 0, imaginární část je rovna 1.

□

Příklad.
Vypočtěte reálnou a imaginární část komplexního čísla

$$\frac{1+i}{1+2i} + \frac{i}{1+i}.$$

Řešení. Je

$$\frac{1+i}{1+2i}+\frac{i}{1+i}=\frac{(1+i)(1-2i)}{5}+\frac{i(1-i)}{2}=\frac{3-i}{5}+\frac{1+i}{2}=\frac{11+3i}{10}\,.$$

Reálná část je rovna $\frac{11}{10}$, imaginární $\frac{3}{10}$.

$\square$

Příklad.
Vypočtěte

$$\left|\frac{3-4i}{3-i}\right|.$$

Řešení. Je

$$\frac{3-4i}{3-i}=\frac{(3-4i)(3+i)}{10}=\frac{13-9i}{10}\,.$$

Alternativně jako podíl modulů.

Proto

$$\left|\frac{13-9i}{10}\right|=\frac{1}{10}\,|13-9i|=\frac{1}{10}\,\sqrt{169+81}=\frac{1}{10}\,\sqrt{250}=\frac{1}{2}\,\sqrt{10}.$$

$\square$

Příklad.
Nalezněte reálná čísla x , y , aby platilo

$$\frac{3-2i}{1-i}=2x+iy.$$

Řešení. Je

$$\frac{3-2i}{1-i}=2x+iy\Leftrightarrow 5+i=4x+2yi\Leftrightarrow x=\frac{5}{4}\wedge y=\frac{1}{2}\,.$$

$\square$

Příklad.
Řešte v $\mathbb{C}$ rovnici $x^2+x+1=0.$ \$
Řešení.

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{1-4}}{2}=\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}\,.$$

$\square$

Příklad.
Pomocí Moivrovy věty vypočtěte $(1+i)^5$.
Řešení. Nejdříve zapíšeme číslo $1+i$ v goniometrickém tvaru. Je

$$1+i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right).$$

Proto

$$(1+i)^5=\left(\sqrt{2}\right)^5\left(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}\right)=4\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-4(1+i).$$

$\square$

Příklad.
Řešte v $\mathbb{C}$ rovnici

$$x^3=-8.$$

Řešení. Podle Moivrovy věty je

$$x\in\left\{2\left(\cos\frac{\pi+2k\pi}{3}+i\sin\frac{\pi+2k\pi}{3}\right)\middle|k\in\{0,1,2\}\right\}.$$

Protože $\left\{\frac{\pi+2k\pi}{3}\middle|k\in\{0,1,2\}\right\}=\left\{\frac{\pi}{3},\pi,\frac{5\pi}{3}\right\}$ a $\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$, $\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\pi=-1$, $\sin\pi=0$, $\cos\frac{5\pi}{3}=\frac{1}{2}$, $\sin\frac{5\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$, je

$$x\in\{1+i\sqrt{3},-2,1-i\sqrt{3}\}.$$

$\square$

Příklad.
Řešte v $\mathbb{C}$ rovnici

$$2x^2 - 1 = i\sqrt{3}.$$

Řešení. Je

$$2x^2 - 1 = i\sqrt{3} \Leftrightarrow x^2 = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}.$$

Proto

$$x \in \left\{ \cos\left(\frac{\pi}{6} + k\pi\right) + i\sin\left(\frac{\pi +}{6} + k\pi\right) \middle| k \in \{0, 1\} \right\} = \left\{ \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2} \right\}.$$

$\square$

1. Zkrácené psaní součtu a součinu

Příklad.
Vypočtěte součet

$$\sum_{j=-1}^{5} j^3.$$

Řešení. Je

$$\sum_{j=-1}^{5} j^3 = (-1)^3 + 0^3 + 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 = -1 + 0 + 1 + 8 + 27 + 64 + 125 = 224.$$

$\square$

Příklad.
Vypočtěte součin

$$\prod_{j=0}^{3} \frac{1}{j+1}.$$

Řešení. Je

$$\prod_{j=0}^{3} \frac{1}{j+1} = \frac{1}{0+1} \cdot \frac{1}{1+1} \cdot \frac{1}{2+1} \cdot \frac{1}{3+1} = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{1}{24}.$$

$\square$

Příklad.
Doplňte meze, aby se výsledek nezměnil:

$$\sum_{j=-1}^{5} j^3 = \sum_{j=2}^{?} ?.$$

Řešení. Je

$$\sum_{j=-1}^{5} j^3 = \sum_{j=2}^{8} (j-3)^3.$$

$\square$

Příklad.
Doplňte meze, aby se výsledek nezměnil:

$$\prod_{j=0}^{3} \frac{1}{j+1} = \prod_{j=-21}^{?} ?.$$

Řešení. Je

$$\prod_{j=0}^{3} \frac{1}{j+1} = \prod_{j=-21}^{-18} \frac{1}{j+22}.$$

$\square$

Příklad.
Vypočtěte

$$\text{a)} \sum_{j=-1}^{4} 2, \quad \text{b)} \prod_{j=-1}^{4} 2.$$

Řešení. Je

$$\text{a)} \sum_{j=-1}^{4} 2 = 6 \cdot 2 = 12, \quad \text{b)} \prod_{j=-1}^{4} 2 = 2^6 = 64.$$

□

Příklad.
Vypočtěte

$$\sum_{k=1}^{n} k.$$

Řešení. Je

$$\begin{array}{ccccccccccccc} \sum_{k=1}^{n} k & = & 1 & + & 2 & + & 3 & + & \dots & + & (n-1) & + & n, \\ \sum_{k=1}^{n} k & = & n & + & (n-1) & + & (n-2) & + & \dots & + & 2 & + & 1, \end{array}$$

takže sečtením čísel pod sebou vznikne na pravé straně n skupinek se stejným součtem $n+1$, proto

$$2\sum_{k=1}^{n} k = n(n+1),$$

takže

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

□

Příklad.
Vypočtěte

$$\sum_{j=1}^{100} (j-10).$$

Řešení. Je

$$\sum_{j=1}^{100} (j-10) = \sum_{j=1}^{100} j - \sum_{j=1}^{100} 10 = \frac{100(100+1)}{2} - 100 \cdot 10 = 50 \cdot 101 - 1000 = 5050 - 1000 = 4050.$$

□

Příklad.
Vypočtěte

$$\sum_{j=1}^{20} (3j-7).$$

Řešení.

$$\sum_{j=1}^{20} (3j-7) = 3\sum_{j=1}^{20} j - \sum_{j=1}^{20} 7 = 3\,\frac{20(20+1)}{2} - 20 \cdot 7 = 30 \cdot 21 - 140 = 630 - 140 = 490.$$

□

Příklad.
Vypočtěte

$$\sum_{j=1}^{5} \sum_{k=2}^{6} (1+j)(2+k).$$

Řešení. Je

$$\sum_{j=1}^{5} \sum_{k=2}^{6} (1+j)(2+k) = \left(\sum_{j=1}^{5} (j+1)\right) \left(\sum_{k=2}^{6} (2+k)\right) = \sum_{j=2}^{6} j \cdot \sum_{k=4}^{8} k = \frac{5 \cdot 8}{2} \cdot \frac{5 \cdot 12}{2} = 20 \cdot 30 = 600.$$

□

Příklad.
Vypočtěte

$$\sum_{k=1}^{n} k^2.$$

Řešení. Označme neznámý součet

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = S.$$

Vypočteme nejprve rozdíl

$$\sum_{k=1}^{n} \Big((k+1)^3 - k^3\Big).$$

Je jednak

$$\sum_{k=1}^{n} \Big((k+1)^3 - k^3\Big) = \sum_{k=1}^{n}(k+1)^3 - \sum_{k=1}^{n} k^3 = (n+1)^3 - 1^3 = (n+1)^3 - 1,$$

neboť všechny sčítance, kromě posledního z první sumy a prvního z druhé sumy, se navzájem odečtou. Je ale také

$$\sum_{k=1}^{n} \Big((k+1)^3 - k^3\Big) = \sum_{k=1}^{n} \Big(k^3 + 3k^2 + 3k + 1 - k^3\Big) = \sum_{k=1}^{n} \Big(3k^2 + 3k + 1\Big) = 3\sum_{k=1}^{n} k^2 + 3\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1 = 3S + 3\,\frac{n(n+1)}{2} + n.$$

Srovnáním dvou výsledků dostaneme rovnici

$$(n+1)^3 - 1 = 3S + 3\,\frac{n(n+1)}{2} + n,$$

odkud

$$S = \frac{1}{3}\left(n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - 1 - 3\,\frac{n(n+1)}{2} - n\right) = \frac{1}{3}\left(n^3 + \frac{3}{2}\,n^2 + \frac{1}{2}\,n\right) = \frac{n(2n^2+3n+1)}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

◻

Příklad.
Vypočtěte součet geometrické posloupnosti

$$\sum_{k=0}^{n} q^k.$$

Řešení. Je

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = 1 + q + q^2 + \ldots + q^n, \qquad / \cdot q$$
$$q\sum_{k=0}^{n} q^k = q + q^2 + q^3 + \ldots + q^{n+1},$$

odkud odečtením dostaneme

$$(1-q)\sum_{k=0}^{n} q^k = 1 - q^{n+1},$$

neboli

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

◻

Příklad.
Vypočtěte

$$\sum_{k=1}^{10} 2^k.$$

Řešení. Je

$$\sum_{k=1}^{10} 2^k = 2\,\frac{2^{10}-1}{2-1} = 2(2^{10}-1) = 2\cdot 1023 = 2046.$$

◻

Příklad.
Vypočtěte

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{2^k}{3^{2k+1}}.$$

Řešení. Je

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{2^k}{3^{2k+1}} = \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{2}{9}\right)^k = \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{9}\cdot\frac{1-\left(\frac{2}{9}\right)^n}{1-\frac{2}{9}} = \frac{2}{21}\left(1-\left(\frac{2}{9}\right)^n\right).$$

□

Příklad.
Vypočtěte

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^k k.$$

Řešení. Pro n sudé dostáváme

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^k k = \sum_{k=1}^{\frac{n}{2}}(2k-(2k-1)) = \frac{n}{2}.$$

Pro n liché dostáváme

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^k k = \sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k k + (-1)^n n = \frac{n-1}{2} - n = -\frac{n+1}{2}.$$

□

Příklad.
Vypočtěte

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}.$$

Řešení. Je

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1+k-k}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right) = \frac{1}{1}-\frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}.$$

□

Příklad.
Vypočtěte

$$\sum_{j=0}^{n}\sum_{k=j}^{n}\binom{k}{j}.$$

Řešení. Je

$$\sum_{j=0}^{n}\sum_{k=j}^{n}\binom{k}{j} = \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j} = \sum_{k=0}^{n}2^k = \frac{2^{n+1}-1}{2-1} = 2^{n+1}-1.$$

počet podmnožin k-prvkové množiny

□

Příklad.
Vypočtěte

$$\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right).$$

Řešení. Je

$$\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right) = \prod_{k=1}^{n}\frac{k+1}{k} = \frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\ldots\cdot\frac{n+1}{n} = \frac{n+1}{1} = n+1.$$

□

Příklad.
Vypočtěte

$$\prod_{k=1}^{n} \sqrt[2^k]{2}.$$

Řešení. Je

$$\prod_{k=1}^{n} \sqrt[2^k]{2} = \prod_{k=1}^{n} 2^{\frac{1}{2^k}} = 2^{\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^k} = 2^{\frac{1}{2}\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}} = 2^{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}.$$

□

Příklad.
Vypočtěte

$$\prod_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right).$$

Řešení. Je

$$\prod_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\cdot\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\sin\left(\frac{(n-1)\pi}{n}\right)\cdot\sin(\pi) = \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\cdot\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\sin\left(\frac{(n-1)\pi}{n}\right)\cdot 0 = 0.$$

□

Příklad.
Vypočtěte

$$\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{n}\prod_{k=1}^{n} ijk.$$

Řešení. Je

$$\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{n}\prod_{k=1}^{n} ijk = \prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{n} i^n j^n n! = \prod_{i=1}^{n} i^{n^2} n!^n n!^n = \prod_{i=1}^{n} i^{n^2} n!^{2n} = n!^{2n^2} n!^{n^2} = n!^{3n^2}.$$

□

Příklad.
Vypočtěte

$$\sum_{k=0}^{n}\prod_{j=1}^{k}\frac{j-n-1}{j}.$$

Řešení. Je

$$\sum_{k=0}^{n}\prod_{j=1}^{k}\frac{j-n-1}{j} = \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k n(n-1)\ldots(n-(k-1))}{k!} = \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k n!}{(n-k)!k!} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k} = (1-1)^n = \left\langle \begin{array}{ll} 1 & \text{pro } n=0, \\ 0 & \text{pro } n>0. \end{array}\right.$$

□

2. Matematická indukce

Příklad.
Dokažte matematickou indukcí vztah

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

Řešení. Pro $n=1$ je levá strana rovna

$$\sum_{k=1}^{1}\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1(1+1)} = \frac{1}{2},$$

pravá strana je rovna

$$\frac{1}{1+1} = \frac{1}{2},$$

obě strany se rovnají, vztah platí.
Nechť vztah platí pro $n \in \mathbb{N}$. Dokážeme ho pro $n+1$. Levá strana je rovna

$$\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n(n+2)+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{n+2}.$$

Příklad.
Dokažte matematickou indukcí vztah

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\,.$$

Řešení. Pro $n = 1$ je levá strana rovna

$$\sum_{k=1}^{1} k^2 = 1^2 = 1.$$

Pravá strana je rovna

$$\frac{1(1+1)(2\cdot 1+1)}{6} = \frac{6}{6} = 1.$$

Obě strany se rovnají, vztah pro $n = 1$ platí.
Nechť vztah v zadání platí pro libovolně zvolené pevné $n \in \mathbb{N}$. Dokážeme ho pro $n+1$. Levá strana je rovna

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(n(2n+1)+6(n+1))}{6} = \frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6}$$
$$= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}\,.$$

Příklad.
Dokažte matematickou indukcí vztah

$$\sum_{k=1}^{n} kk! = (n+1)! - 1.$$

Řešení. Pro $n = 1$ je levá strana rovna

$$\sum_{k=1}^{1} kk! = 1\cdot 1! = 1.$$

Pravá strana je rovna

$$(1+1)! - 1 = 2 - 1 = 1.$$

Obě strany jsou si rovny, vztah proto pro $n = 1$ platí.
Nechť vztah v zadání platí pro libovolné $n \in \mathbb{N}$. Dokažme ho pro $n+1$. Levá strana je rovna

$$\sum_{k=1}^{n+1} kk! = \sum_{k=1}^{n} kk! + (n+1)(n+1)! = (n+1)! - 1 + (n+1)(n+1)! = (n+1)!(n+2) - 1 = (n+2)! - 1.$$

Příklad.
Dokažte matematickou indukcí

$$a^n - b^n = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}.$$

Řešení. Pro $n = 1$ je levá strana rovna

$$a^1 - b^1 = a - b.$$

Pravá strana je rovna

$$(a-b)\sum_{k=0}^{1-1} a^k b^{1-1-k} = (a-b)a^0 b^0 = a - b.$$

Strany jsou si rovny, vztah pro $n = 1$ platí.
Nyní předpokládejme platnost vztahu pro libovolné pevné $n \in \mathbb{N}$. Dokažme ho pro $n+1$.
Levá strana je rovna $a^{n+1} - b^{n+1}$. Pravá strana je rovna

$$(a-b)\sum_{k=0}^{n} a^k b^{n+1-1-k} = (a-b)\sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k} = (a-b)\left(\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-k} + a^n b^0\right) = b(a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k} + (a-b)a^n = b(a^n - b^n) + (a-b)a^n$$
$$= a^{n+1} - b^{n+1}.$$

Příklad.
Dokažte matematickou indukcí vztah

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Řešení. Pro $n = 1$ je levá strana rovna

$$(a+b)^1 = a+b.$$

Pravá strana je pro $n = 1$ rovna

$$\sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} a^k b^{1-k} = \binom{1}{0} a^0 b^1 + \binom{1}{1} a^1 b^0 = b+a.$$

Obě strany jsou si rovny, vztah pro $n = 1$ tedy platí.
Předpokládejme, že vztah platí pro libovolně zvolené pevné $n \in \mathbb{N}$ a dokažme ho pro $n+1$. Levá strana je rovna

$$(a+b)^{n+1}.$$

podobně opravit i dále

Pravá strana je rovna

$$\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k} = b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k} \cancel{= b^{n+1}} = b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n\cancel{+1}} \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right) a^k b^{n+1-k} + a^{n+1} \cancel{=} b^{n+1} +$$
$$\sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^k b^{n+1-k} + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} = b^{n+1} + a \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} + b \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} - b^n \right) = b^{n+1} + a(a+b)^n + b((a+b)^n - b^n)$$
$$= (a+b)(a+b)^n = (a+b)^{n+1}.$$

∎

(Intuitivnější je začít upravovat levou stranu.)

Příklad.
Dokažte matematickou indukcí vztah

$$(\cos\varphi + i \sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i \sin n\varphi.$$ (Moivre)

Řešení. Pro $n = 1$ je levá strana rovna

$$\cos\varphi + i\sin\varphi.$$

Pravá strana je pro $n = 1$ rovna

$$\cos\varphi + i\sin\varphi.$$

Obě strany jsou si tedy rovny, vztah pro $n = 1$ platí.
Předpokládejme nyní platnost vztahu pro libovolně zvolené pevné $n \in \mathbb{N}$ a dokažme ho pro $n+1$. Levá strana je rovna

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^{n+1} = (\cos\varphi + i\sin\varphi)^n (\cos\varphi + i\sin\varphi) = (\cos n\varphi + i\sin n\varphi)(\cos\varphi + i\sin\varphi) = \cos n\varphi\cos\varphi + i\sin n\varphi\cos\varphi + i\cos n\varphi\sin\varphi$$
$$- \sin n\varphi\sin\varphi = \cos(n\varphi + \varphi) + i\sin(n\varphi + \varphi) = \cos(n+1)\varphi + i\sin(n+1)\varphi.$$

∎