

Otázky k státním závěrečným zkouškám pro obor **Matematické inženýrství**

1. **Předmět obecného základu:**

Pokročilé partie funkcionální analýzy

2. **Předmět užšího obecného základu:**

Numerická matematika a Variační metody

3. **Předměty užší specializace:**

- a) Metody matematické statistiky
- b) Diferenciální rovnice a dynamické systémy
- c) Teorie grafů

Pokročilé partie funkcionální analýzy

zkoušející prof. Ing. Miloslav Havlíček, DrSc. a prof. Ing. Pavel Šťovíček, DrSc.

- Tenzorový součin Hilbertových prostorů a jeho realizace, uzávěr tenzorového součinu, ortonormální báze v tenzorovém součinu. Tenzorový součin v případě konečné dimenze. Tenzorový součin omezených operátorů. Formule pro skládání a sdružení tenzorového součinu. Normální, unitární, hermitovský tenzorový součin.
- Vektorové funkce. Jednoduché funkce. Integrabilita vektorové funkce vzhledem k míře. Bochnerův integrál vektorové funkce. Trojúhelníková nerovnost. Aditivita integrálu. Lebesgueova věta pro Bochnerův integrál.
- Hustě definované operátory na Hilbertově prostoru. Sdružený operátor k hustě definovanému operátoru a jeho základní vlastnosti. Symetrické, samosdružené operátory. Symetrické rozšíření, maximální operátor. Hellinger-Töplitzova věta.
- Uzávěr symetrického operátoru. V podstatě samosdružené operátory. Vztah mezi spektry hustě definovaného uzavřeného operátoru a jeho sdružení. Esenciální spektrum.
- Indexy defektu. Spektrum uzavřeného symetrického operátoru. První von Neumannova formule. Cayleyova transformace. Uzavřené symetrické rozšíření. Druhá von Neumannova formule. Spektrum samosdruženého rozšíření symetrického operátoru.
- Projektorová míra na \mathbb{R}^n . Rozklad jedničky. Příklad pro $n=1$. Funkcionální počet.
- Spektrální míra. Spektrální rozklad. Spektrální teorém pro hermitovské, omezené normální a samosdružené operátory. Diskrétní spektrum u samosdružených operátorů.
- Funkce samosdruženého operátoru. Vztah mezi spektrální mírou a rezolventou. Stoneova formule. Funkce komutujících samosdružených operátorů. Spektrální reprezentace samosdruženého operátoru.
- Silně spojitě jednoparametrické grupy unitárních operátorů. Generátor unitární grupy a jeho existence, Stoneův teorém. Tenzorový součin unitárních grup. Trotterova formule.
- Asociativní a neasociativní algebry, algebry s jedničkou, *-algebry, normované a Banachovy algebry. Reprezentace algebry. C^* -algebry, von Neumannovy algebry. Symetrické množiny, úplné soubory komutujících operátorů.

Numerická matematika

zkoušející prof. Dr. Ing. Michal Beneš, Ing. Jiří Mikyška, Ph.D.

- Sobolevovy prostory a slabé řešení okrajové úlohy pro eliptickou parciální diferenciální rovnici. Laxova-Milgramova věta.
- Galerkinova metoda, odhad chyby aproximace, Céovo lemma.
- Praktická realizace metody konečných prvků pro danou eliptickou úlohu nebo parabolickou úlohu.
- Definice, druhy konečných prvků, vztahy ekvivalence, interpolant.
- Lokální a globální odhady interpolační chyby, vystředované Taylorovy polynomy a Bramble-Hilbertova věta.
- Odhady chyby metody konečných prvků a jejich role ve stacionárních a evolučních úlohách.
- Citlivost spekter obecných a speciálních tříd matic, zpětná analýza problému vlastních čísel, případ jednoduchého vlastního čísla.
- Citlivost a zpětná stabilita řešení soustav lineárních algebraických rovnic.
- Metody konstrukce QR-rozkladů – Givensova a Householderova metoda, Gramův-Schmidtův ortogonalizační proces, aplikace v problému nejmenších čtverců.
- Vybrané metody krylovovských podprostorů pro řešení soustav lineárních algebraických rovnic – Arnoldiho algoritmus, metoda GMRES, Lanczosův algoritmus, metody CG, MINRES, dvoustranný Lanczosův algoritmus, metody BiCG, QMR.

Metody matematické statistiky

zkoušející RNDr. Jiří Michálek, CSc. a Ing. Václav Kůs, Ph.D.

- Náhodná veličina. Distribuční funkce, charakteristická funkce, základní vlastnosti a vztahy s distribučními funkcemi.
- Bayesův vzorec a jeho využití. Slabý zákon velkých čísel, konvergence dle pravděpodobnosti. Čebyševova nerovnost. Bernoulliova a Čebyševova limitní věta. Silný zákon velkých čísel a konvergence ve smyslu skoro jistě.
- Centrální limitní teorém. Moivre-Laplaceova, Feller-Lindebergova podmínka. Ljapunovova věta.
- Pojem statistického odhadu, bodové a intervalové odhady. Rao-Cramérova nerovnost, konzistence, maximálně věrohodné funkce.
- Pojem statistické hypotézy, Neyman-Pearsonovo lemma, chyby 1. a 2. druhu, test poměrem věrohodnosti.
- Definice náhodného procesu, Kolmogorovova věta, konzistentní systém konečně-rozměrných rozdělení.
- Vlastnosti trajektorií, pojem derivace a integrálů od náhodného procesu, stochastická míra a náhodný integrál, Wienerův proces
- Kovarianční funkce procesu a Karhunenova věta, slabě stacionární procesy a jejich spektrální rozklad. Bochnerova věta, Herglotzovo lemma
- Predikce procesů a posloupností, lineární singularita a regularita. Woldův rozklad
- Ergodické věty a zákon velkých čísel.

Diferenciální rovnice a dynamické systémy

zkoušející prof. Dr. Ing. Michal Beneš

- Okrajové úlohy pro diferenciální rovnice a extrém funkcionálu, Eulerovy rovnice, podmínky existence extrému, konvexnost funkcionálu, monotónní zobrazení.
- Minimalizace kvadratického funkcionálu určeného lineárním hustě definovaným samosdruženým operátorem. Metoda zúplnění, existence minima kvadratického funkcionálu a zobrazení řešení diferenciální rovnice.
- Základní kvalitativní vlastnosti Navierových-Stokesových rovnic - silná a slabá řešení, otázky existence a jednoznačnosti ve stacionárním a nestacionárním případě.
- Existence, spojitá závislost a diferencovatelnost řešení počáteční úlohy pro rovnice v normálním tvaru v závislosti na parametrech a počátečních podmínkách.
- Počáteční a smíšené úlohy pro diferenciální rovnice a teorie dynamických systémů, základní pojmy, příklady konečněrozměrných a nekonečněrozměrných dynamických systémů.
- Vyšetřování stability pevných bodů pomocí metody linearizace. Stabilita řešení podle Ljapunova. Vztah k minimalizaci funkcionálů.
- Periodická řešení, limitní cykly, Poincarého-Bendixsonova věta, Bendixsonovo kritérium.
- Vyšetřování chování konečněrozměrných a nekonečněrozměrných dynamických systémů v okolí pevných bodů. Dynamika vybraných typů evolučních diferenciálních rovnic (oscilátory, reakční rovnice, reakčně-difúzní rovnice, Navierovy-Stokesovy rovnice).
- Topologická orbitální ekvivalence a bifurkace. Redukce na centrální varietu.
- Geometrické pojmy pro vyšetřování trajektorií dynamických systémů, topologická dimenze, Hausdorffova dimenze.

Teorie grafů

zkoušející Ing. Petr Ambrož, Ph.D.

- Lesy, stromy a kostry
- Vrcholová a hranová souvislost grafu
- Párování, perfektní párování, maximální párování
- Hamiltonovské cesty a kružnice, eulerovské cykly
- Hranová barevnost
- Vrcholová barevnost grafu, kritické grafy
- Planární grafy, Kuratowského věta, barevnost planárních grafů
- Vlastní čísla matic grafu, vlastnosti maximálního vlastního čísla
- Toky v sítích