



Turingův model prostorového uspořádání a vliv geometrie

školitel: Václav Klika, konzultant: Michal Kozák

typ práce: bakalářská/diplomová

popis tématu:

Mechanismus difuzí způsobené (Turingovy) nestability homogenního stacionárního řešení v reakčně-difuzních (RD) rovnicích se od vydání Turingova článku v roce 1952 [11] hojně užívá v mnoha vědních disciplínách k modelování vzniku prostorového uspořádání, například ve vývojové biologii a ekologii (morfogeneze, pigmentace ryb, vegetační pruhy v krajině) či chemii (chemické reakce, růst krystalů v tuhoucích slitinách).

Předmětem této práce je prověřit Turingův koncept vzniku prostorového uspořádání uvažováním nestandardní geometrie. Cílem je pomocí teorie lineární stability najít podmínky pro Turingovu nestabilitu na sféře a porovnat s klasickými podmínkami. Téma též volně navazuje na několikiletý matematicko-biologický seminář na Matematickém ústavu AV.

Detailnější popis práce je představen níže uvedenou osnovou, která doplňuje získávané poznatky v průběhu celého studia umožňující jejich lepší porozumění a které si tak student postupně osvojí:

- (1) Seznámení se s konceptem difuzí poháněné nestability a role okrajových podmínek v nich [8, 5, 6].
- (2) Seznámení se s konceptem lineární analýzy stability a spektrální teorií (kdy má Laplaceův operátor čistě bodové spektrum a tedy jeho vlastní funkce tvoří ortonormální bázi v Hilbertově prostoru $L^2(\Omega)$) [6, 1, 4]([3, 9]).
- (3) Analyticky nalézt vlastní čísla a vlastní funkce Laplaceova operátoru na sféře o poloměru R . Možnost řešit tuto úlohu i numericky pomocí spektrálních metod, např. v Matlabu [10].
- (4) Jaký mód (vlastní funkce) se projeví ve vzniku prostorového uspořádání, srovnat s klasickými výsledky v Turingově nestabilitě (viz 1.).
- (5) Porovnat vliv velikosti oblasti na výsledný vzor (najít vhodný parametr pro toto srovnání). Existuje kritická velikost koule, pod kterou nelze docílit prostorového uspořádání (tak tomu je u klasického Turinga)?

- (6) Prozkoumání role okrajových podmínek: u sféry nejsou, srovnat s vlivem okrajových podmínek ve standardním přístupu (za analogickou situaci neexistence okrajových podmínek u sféry lze uvažovat periodické okrajové podmínky; další nápady).
- (7) Shrnutí, důsledky pro Turingův koncept prostorové organizace, modelování zbarvení šelem či rakovinových metastáz [2].
- (8) Možné rozšíření - neuvažovat poloměr R jako pevný, v čase neměnný parametr, ale uvažovat skutečný růst oblasti (lineární, exponenciální, logistický) [7].

doporučená literatura:

- [1] Margaret Beck. A brief introduction to stability theory for linear pdes. http://math.bu.edu/people/mabeck/lin_stab_minicourse_2012.pdf, 2012. Accessed: 2014-04-11.
- [2] Mark AJ Chaplain, Mahadevan Ganesh, and Ivan G Graham. Spatio-temporal pattern formation on spherical surfaces: numerical simulation and application to solid tumour growth. *Journal of mathematical biology*, 42(5):387–423, 2001.
- [3] E Brian Davies and Edward Brian Davies. *Spectral theory and differential operators*, volume 42. Cambridge University Press, 1996.
- [4] David Eric Edmunds and WD Evans. *Spectral theory and differential operators*. Oxford, 1987.
- [5] V. Klika, R.E. Baker, D. Headon, and E.A. Gaffney. The influence of receptor-mediated interactions on reaction-diffusion mechanisms of cellular self-organisation. *Bull math biol*, 74(4):935–957, 2012.
- [6] M. Kozák. Bifurkace v matematických modele v biologii. Master's thesis, MFF UK, 2013.
- [7] A. Madzvamuse, E.A. Gaffney, and P.K. Maini. Stability analysis of non-autonomous reaction-diffusion systems: the effects of growing domains. *J math biol*, 61(1):133–164, 2010.
- [8] JD Murray. *Mathematical biology*, volume 2. springer, 2002.
- [9] Mikhail Aleksandrovich Shubin and Stig Ingvar Andersson. *Pseudodifferential operators and spectral theory*. Springer, 1987.
- [10] Lloyd N Trefethen. *Spectral methods in MATLAB*, volume 10. Siam, 2000.
- [11] A. Turing. The chemical basis of morphogenesis. *Phil. Trans. R. Soc. Lond. B*, 237:37–72, 1952.