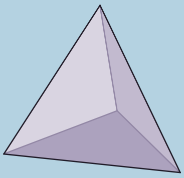
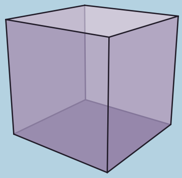
Platónská tělesa

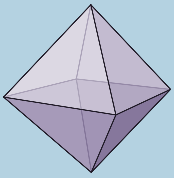
Platónské těleso — z vrcholů stejný počet hran a stěny jsou shodné pravidelné mnohoúhelníky



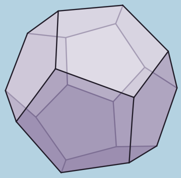
čtyřstěn
z vrcholů 3 hrany
trojúhelníkové stěny



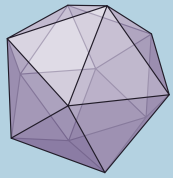
krychle
z vrcholů 3 hrany
čtvercové stěny



osmistěn
z vrcholů 4 hrany
trojúhelníkové stěny

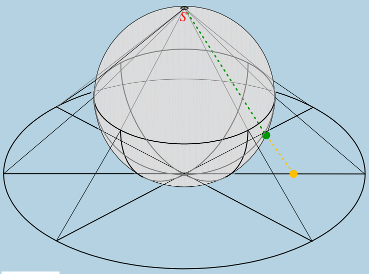


dvanáctistěn
z vrcholů 3 hrany
pětiúhelníkové stěny



dvacetistěn
z vrcholů 5 hran
trojúhelníkové stěny

Překreslení tělesa z 3D prostoru na papír



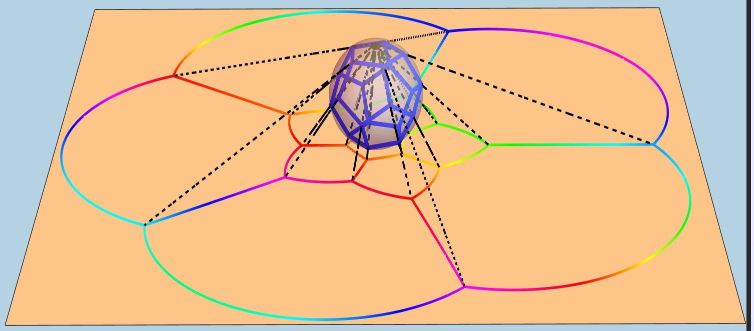
Postup překreslení:

1. Danému 3D tělesu opiš kouli.
2. Na kouli vyznač severní pól S.
3. Polož kouli na papír J pólem.
4. Veď úsečky z S na body pláště.
5. Protáhni úsečky až na papír.

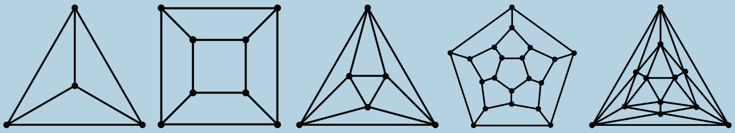
Vztah plášť koule (bez S) $\longleftrightarrow$ papír

Tomuto se říká stereografická projekce.

Příklad: Stereografická projekce dvanáctistěnu



Platónská tělesa nakreslená na papír



#bodů = 4	#bodů = 8	#bodů = 6	#bodů = 20	#bodů = 12
#čar = 6	#čar = 12	#čar = 12	#čar = 30	#čar = 30
#stěn = 4	#stěn = 6	#stěn = 8	#stěn = 12	#stěn = 20

Rovinný graf — nakreslení v “matematičtině”

Jak by šlo matematicky popsat, že jsme něco “hezky” nakreslili na papír?

1. Vybrali jsme konečně mnoho bodů na papíře a označili je puntíky.
2. Některé dvojice bodů jsme propojili souvislou čarou.
3. Každé dva body jsou propojeny nejvýše jednou čarou.
4. A je zakázáno, aby se jakékoliv dvě čáry překřížily.

Zamyslete se, proč stereografické překreslení lib. tělesa nikdy nemá křížení.

Eulerův vztah pro libovolný rovinný graf . . .

Před jeho prezentací je však potřeba vysvětlit následující dva pojmy.

Mějme na papíře nakreslený rovinný graf a vezměme do ruky nůžky. Lze papír rozstříhnout na dvě části tak, aby střih nezasáhl žádný bod ani žádný kus čáry? Stříhněme (jinak však ne!). Pokračujme, dokud se dá stříhat.

Označme #součástí jako počet kusů papíru na konci stříhání.

Opět mějme na papíře nakreslený rovinný graf. Teď si pro změnu představme, že po celém papíru rozlijeme vodu, která však nikdy nemůže přetéct ani přes čáry ani body — rozlitá voda vytvoří na papíře “rybníčky”.

Označme #stěn jako počet rybníčků, jež nám na papíře vznikly.

Švýcarský matematik Leonard Euler (1707-1783) objevil následující:

#bodů + #stěn se vždy rovná #čar + #součástí + 1

. . . fakt to platí pro každý rovinný graf? Ano!

Důvěřuj, ale prověřuj. Někdo nakreslil na papír n bodů a mezi nimi m čar.

My toto nakreslení teď krok-za-krokem obtahujme, a u toho se dívejme, zda aktuálně obtažený kus splňuje Eulerův vztah. *Spoiler: platit bude vždy!*

1) Na začátku obtáhněme všech n bodů. Co o tom říká Eulerův vztah?

Dosazením — bodů je n, čar 0, stěna jedna, a součástí n — E. vztah platí!

2) Jednu po druhé obtahujme nakreslené čáry, a zkoumejme změnu na levé i pravé straně Eulerova vztahu po obtažení i-té čáry. Jsou dvě možnosti:

i) Buď čára spojí body uvnitř jedné obtažené součásti, čímž se jedna stěna rozpůlí na dvě. Hodnota levé i pravé strany vztahu tak stoupne přesně o 1.

ii) Nebo čára spojí body z různých součásti, takže #čar stoupne o 1 a #součástí klesne o 1. Tudíž hodnota na levé i pravé straně zůstane stejná.

V každém případě, Eulerův vztah bude platit i po obtažení m-té čáry.

Finále — Platónských těles je jen oněch zmíněných pět, žádná další už nemohou existovat!

Je na čase použít stereografickou projekci a Eulerův vztah na kterékoliv Platonské těleso, kde z vrcholů vede d hran a stěny tvoří pravidelné r-úhelníky.

Překreslení tělesa na papír vytvoří jednu jedinou součást, kde se z vrcholů tělesa stanou body, z hran tělesa čáry a ze stěn tělesa stěny rovinného grafu.

Protože u každého bodu se musí sbíhat přesně d čar a na druhou stranu každá čára spojuje dva body, musí platit následující rovnost $d \times \#\text{bodů} = 2 \times \#\text{čar}$.
Analogicky platí, že každá stěna na papíře má kolem sebe přesně r čar a zároveň každá čára leží na rozhraní dvou stěn, díky čemuž $r \times \#\text{stěn} = 2 \times \#\text{čar}$.

Dosazením dvou právě odvozených rovností do Eulerova vztahu zjišťujeme, že pro Platónské těleso s parametry d a r musí platit následující rovnost:

$$\frac{2 \times \#\text{čar}}{d} + \frac{2 \times \#\text{čar}}{r} = \#\text{čar} + 2 \quad \xLeftrightarrow{\text{ekvivalentní úprava: vyděl obě strany výrazem } \frac{1}{2} \times \#\text{čar}} \quad \frac{1}{d} + \frac{1}{r} = \frac{1}{2} + \frac{1}{\#\text{čar}} \,.$$

Pravá strana upravené rovnosti tedy musí být ostře větší než $\frac{1}{2}$. To je však dost omezující podmínka pro hodnoty r a d — musí totiž platit, že menší číslo z r a d je nejvýše 3 (byla-li by obě dvě alespoň 4, tak levá strana bude nejvýše $\frac{1}{2}$, což je málo). Protože však r-úhelníky tvořící stěny musí splňovat $r \geq 3$, a protože $d \geq 3$ díky tomu, že v libovolném trojrozměrném tělese z každého vrcholu vedou alespoň 3 hrany, musí nastat některá z následujících pěti možností: $r = 3, d = 3$ (čtyřstěn), $r = 4, d = 3$ (krychle), $r = 3, d = 4$ (osmistěn), $r = 5, d = 3$ (dvanáctistěn), nebo $r = 3, d = 5$ (dvacetistěn).

Lehký úkol: Nakreslete na papír 16 bodů a 42 nekřížících se čar mezi nimi. | Těžký úkol: Proč má každý rovinný graf s $n \geq 3$ body nejvýše $3n - 6$ čar?